

Comónadas y coanillos de Galois*

J. Gómez-Torrecillas

Departamento de Álgebra

Universidad de Granada

E18071 Granada, España

e-mail: gomezj@ugr.es

Versión 1.2

Introducción

La noción de coanillo fue introducida por M. E. Sweedler en [17] con el objeto de formular y demostrar un predual al Teorema de Jacobson-Bourbaki para extensiones de anillos de división. Un argumento fundamental en [17] es el siguiente: dados $E \subseteq A$ anillos de división, cada coideal J del A -coanillo $A \otimes_E A$ da lugar a un coanillo cociente $\mathfrak{C} = A \otimes_E A/J$. Si $g \in \mathfrak{C}$ denota el elemento «como de grupo» $1 \otimes_E 1 + J$, entonces $D = \{a \in A : ag = ga\}$ es un anillo de división intermedio $E \subseteq D \subseteq A$. Además, se tiene el homomorfismo canónico de A -coanillos $\zeta : A \otimes_D A \rightarrow \mathfrak{C}$ que lleva $1 \otimes_D 1$ en g . Resulta de [17, 2.2 Fundamental Lemma] que ζ es un isomorfismo de A -coanillos, lo cual es, a la postre, básico para establecer la correspondencia entre coideales de $A \otimes_E A$ y extensiones intermedias $E \subseteq D \subseteq A$ [17, Fundamental Theorem]. El citado Lema Fundamental de Sweedler puede reemplazarse por el hecho de que el coanillo $A \otimes_D A$ resulta ser simple cosemisimple [12, Theorem 4.4], [11, Theorem 3.2, Theorem 4.3], [6, 28.21] o, alternativamente, que A es, como \mathfrak{C} -comódulo, un generador simple de la categoría de \mathfrak{C} -comódulos por la derecha. Vemos, por tanto, que lo que hay detrás de [17, 2.1 Fundamental Theorem] puede expresarse en términos categóricos. De hecho, esta idea se ha explotado recientemente para establecer una generalización de la teoría de Sweedler para anillos simples artinianos [8]. En este trabajo mostramos que la idea de obtener un isomorfismo de coanillos a partir de propiedades categóricas puede formularse en último término mediante comónadas.

Cada elemento «como de grupo» g de un coanillo \mathfrak{C} sobre un anillo unitario A , da lugar [4] a un homomorfismo canónico de A -coanillos $\text{can}_A : A \otimes_B A \rightarrow \mathfrak{C}$, que lleva $1 \otimes_B 1$ en g , donde B es el subanillo de los elementos g -coinvariantes de A , y $A \otimes_B A$ es el

*Investigación realizada en el proyecto MTM2004-01406 «Métodos algebraicos en Geometría no conmutativa» financiado por DGICYT y FEDER

coanillo canónico de Sweedler [17]. El elemento «como de grupo» g proporciona también un par de funtores adjuntos entre la categoría \mathbf{Mod}_B de los B -módulos por la derecha y la categoría $\mathbf{Comod}_{\mathfrak{C}}$ de \mathfrak{C} -comódulos por la derecha [4]. El adjunto por la izquierda está definido aquí como un producto tensor $- \otimes_B A : \mathbf{Mod}_B \rightarrow \mathbf{Comod}_{\mathfrak{C}}$, usando la estructura de \mathfrak{C} -comódulo por la derecha que define g sobre A . El adjunto por la derecha puede ser interpretado como el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, -) : \mathbf{Comod}_{\mathfrak{C}} \rightarrow \mathbf{Mod}_B$. T. Brzeziński demuestra [4, Theorem 5.6] que, para \mathfrak{C} plano como A -módulo por la izquierda, esta adjunción es una equivalencia de categorías si, y sólo si, \mathfrak{C} es de Galois (i.e., \mathbf{can}_A es un isomorfismo) y A es un B -módulo por la izquierda fielmente plano. La aplicación canónica \mathbf{can}_A puede ser interpretada como un homomorfismo de comónadas de la siguiente manera: El A -coanillo \mathfrak{C} da lugar a una comónada sobre \mathbf{Mod}_A construida sobre el funtor $- \otimes_A \mathfrak{C}$ [6, 18.28]. Por otra parte, la adjunción asociada a la extensión de anillos $B \subseteq A$ determina [1, Section 3.1] otra comónada sobre \mathbf{Mod}_A . De esta manera, la aplicación canónica \mathbf{can}_A da lugar al homomorfismo de comónadas $- \otimes_A \mathbf{can}_A : - \otimes_A A \otimes_B A \rightarrow - \otimes_A \mathfrak{C}$. Si (\mathfrak{C}, g) es un coanillo de Galois, estas comónadas son isomorfas y ocurre que el funtor $- \otimes_B A : \mathbf{Mod}_B \rightarrow \mathbf{Comod}_{\mathfrak{C}}$ es, salvo isomorfismos naturales, el funtor de comparación de Eilenberg-Moore [1, Section 3.2]. Por tanto, una de las implicaciones de [4, Theorem 5.6] puede obtenerse como una consecuencia del Teorema de Beck [1, Section 3.3]. Este no parece ser el caso de la implicación recíproca. Concretamente, el hecho de que el funtor $- \otimes_B A : \mathbf{Mod}_B \rightarrow \mathbf{Comod}_{\mathfrak{C}}$ sea una equivalencia implique que la aplicación canónica sea un isomorfismo exige un argumento independiente, que reposa sobre cierta relación existente entre la aplicación canónica \mathbf{can}_A y la counidad de la adjunción entre los funtores $- \otimes_B A$ y $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, -)$. De hecho, para que \mathfrak{C} sea de Galois, basta con que la counidad de dicha adjunción sea un isomorfismo [6, 18.26], [11, Lemma 3.1], apareciendo la condición de ser Galois como parte de una caracterización del carácter fiel y pleno del funtor $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(A, -)$ [6, 18.27], [7, Theorem 3.8], [11, Remark 3.7]. De hecho, los citados resultados están demostrados en el ámbito más general de los coanillos de comatrices, introducidos en [11], y en los que el papel del elemento «como de grupo» g lo juega un \mathfrak{C} -comódulo por la derecha Σ que es finitamente generado y proyectivo como A -módulo, y $B = \mathrm{End}(\Sigma_{\mathfrak{C}})$. La generalización de [4, Theorem 5.6] en este ámbito fue demostrada en [11, Theorem 3.2]. Nuestro objetivo en este artículo es investigar qué aspectos de estos resultados admiten una formulación en términos puramente de comónadas, lo que esperamos nos permita en futuras situaciones concretas concentrar nuestra atención en lo específico de cada una de ellas, al tener resueltos aspectos relevantes generales.

Partiremos de una comónada G sobre una categoría \mathcal{A} , y de un funtor $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ con un adjunto por la derecha $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Parametrizaremos de manera biunívoca los funtores $K : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}_G$ que se factorizan a través de L mediante los homomorfismos de comónadas $\varphi : LR \rightarrow G$ (Teorema 1.2). Usaremos la notación K_{φ} para designar esta dependencia. Seguidamente, veremos bajo qué condiciones uno de tales funtores $K_{\varphi} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}_G$ tiene un adjunto por la derecha $D_{\varphi} : \mathcal{A}_G \rightarrow \mathcal{B}$ (Proposición 2.1). Demostraremos que D_{φ} es fiel y pleno si y sólo si φ es un isomorfismo y L preserva ciertos igualadores (Teorema 2.5) y concluiremos nuestros resultados generales caracterizando cuándo K_{φ} proporciona una equivalencia entre las categorías \mathcal{B} y \mathcal{A}_G (Teorema 2.6). Obviamente, los funtores carac-

terizados así son, a fortiori, comonádicos o tripeables pero, a diferencia del planteamiento del Teorema de Beck, aquí la comónada G está dada de antemano, y cada funtor K_φ corresponde a una «representación» de G . La situación tratada por el Teorema de Beck es aquella en que φ es la identidad, esto es, $G = LR$ es la comónada asociada a la adjunción.

Una situación que motiva nuestro punto de vista viene dada por una estructura entrelazante entre un álgebra y una coálgebra, y un módulo entrelazado [5]. Entonces la comónada G viene dada por el coanillo asociado a la estructura entrelazante [4, Section 2], y el funtor K_φ está definido por un módulo entrelazado, que no es sino un comódulo sobre el mencionado coanillo. Una cuestión natural es estudiar la relación entre la categoría de módulos entrelazados y la de módulos sobre el subanillo de coinvariantes del módulo entrelazado y, en particular, si ambas categorías son equivalentes.

Aplicaremos nuestros teoremas generales al caso de coanillos sobre anillos firmes, lo que ilustrará cómo los resultados sobre comónadas de las secciones 1 y 2 simplifican significativamente el tratamiento de algunos aspectos relevantes de los coanillos de comatrices y los comódulos de Galois estudiados en [11], [13].

Nota importante: En esta versión revisada, debemos decir que buena parte de los resultados de las secciones 1 y 2 son conocidos para los especialistas en Teoría de Categorías. De hecho, B. Mesablishvili nos ha informado gentilmente de este hecho, proporcionándonos en particular las referencias [9] y [2]. Hemos incluido las correspondientes atribuciones de los resultados, aunque no se puede descartar que más enunciados de las secciones 1 y 2 trabajo resulten, al menos, familiares para los mencionados especialistas. Esperamos, no obstante, que nuestros enunciados y pruebas elementales pudieran ser de alguna utilidad a aquellos lectores con conocimientos no especializados en Categorías y Funtores, al hacer más accesible para ellos, como así ha sido para el autor de estas notas, un enlace entre los coanillos de Galois y la bien desarrollada teoría general de comónadas.

1 Funtores con valores en coálgebras y homomorfismos de comónadas

Sea (G, Δ, ε) una comónada (o cotriple) sobre una categoría \mathcal{A} , esto es, un funtor $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ junto con dos transformaciones naturales $\Delta : G \rightarrow G^2$ y $\varepsilon : G \rightarrow id_{\mathcal{A}}$ tales que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Delta} & G^2 \\ \Delta \downarrow & & \downarrow G\Delta \\ G^2 & \xrightarrow{\Delta G} & G^3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G & \xleftarrow{\varepsilon G} & G^2 \xrightarrow{G\varepsilon} G \\ & \nwarrow & \uparrow \nearrow \\ & G & \end{array}$$

son conmutativos [1, Chapter 3]. Seguiremos en lo posible [1], entendiendo automáticamente cada afirmación sobre mónadas (triples) en su versión para comónadas. Supongamos un funtor $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ que tiene un adjunto por la derecha $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Entonces, si $\eta : id_{\mathcal{B}} \rightarrow RL$ es la unidad de la adjunción, y $\epsilon : LR \rightarrow id_{\mathcal{A}}$ es su counidad, se tiene

definida [1, Proposition 3.1.2] la comónada (LR, δ, ϵ) sobre \mathcal{A} , donde $\delta = L\eta R$. Recordemos la categoría \mathcal{A}_G de las G -coálgebras [1, Section 3.1], cuyos objetos son pares (X, x) consistentes en un objeto X de \mathcal{A} y un morfismo $x : X \rightarrow GX$ tales que

$$Gx \circ x = \Delta_X \circ x, \quad \varepsilon_X \circ x = id_X$$

Dadas G -coálgebras $(X, x), (X', x')$, los homomorfismos $f : X \rightarrow X'$ en \mathcal{A} tales que $Gf \circ x = x' \circ f$ constituyen el conjunto de homomorfismos $\text{Hom}_{\mathcal{A}_G}(X, X')$ en \mathcal{A}_G de (X, x) a (X', x') .

Denotemos por $U : \mathcal{A}_G \rightarrow \mathcal{A}$ el funtor que olvida. Consideraremos aquellos funtores $K : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}_G$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{K} & \mathcal{A}_G \\ & \searrow L & \downarrow U \\ & & \mathcal{A} \end{array} \quad (1)$$

es conmutativo. Estamos interesados particularmente en el caso en que K proporciona una equivalencia de categorías entre \mathcal{B} y \mathcal{A}_G . Comenzaremos estableciendo una correspondencia biunívoca entre los funtores K que hacen conmutar el diagrama (1) y los homomorfismos de comónadas $\varphi : LR \rightarrow G$. Esta correspondencia es consecuencia de la siguiente Proposición 1.1 que, por otra parte, establece algunos hechos técnicos fundamentales para abordar la caracterización de las equivalencias de categorías K que hacen conmutar (1). Recordemos [1, Section 3.6] que un homomorfismo de comónadas de LR a G es una transformación natural $\varphi : LR \rightarrow G$ tal que $\Delta\varphi = \varphi^2\delta$ y $\varepsilon\varphi = \epsilon$. La correspondencia biunívoca entre los objetos descritos en las afirmaciones (A) y (C) de la Proposición 1.1 puede deducirse de [9, Proposition II.1.4].

Proposición 1.1. *Existe una correspondencia biunívoca entre*

(A) *Morfismos de comónadas de $(LR, L\eta R, \epsilon)$ a (G, Δ, ε) ,*

(B) *Transformaciones naturales $R \xrightarrow{\alpha} RG$ tales que los siguientes diagramas conmutan*

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\alpha} & RG \\ \downarrow \alpha & & \downarrow R\Delta \\ RG & \xrightarrow{\alpha G} & RG^2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\alpha} & RG \\ & \searrow & \downarrow R\varepsilon \\ & & R \end{array} \quad (2)$$

y

(C) *Transformaciones naturales $L \xrightarrow{\beta} GL$ tales que los siguientes diagramas conmutan*

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\beta} & GL \\ \downarrow \beta & & \downarrow \Delta L \\ GL & \xrightarrow{G\beta} & G^2L \end{array} \quad \begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\beta} & GL \\ & \searrow & \downarrow \varepsilon L \\ & & L \end{array} \quad (3)$$

Demostración. Comenzamos demostrando la correspondencia biunívoca entre las transformaciones naturales descritas en (A) y (B). Si partimos de un morfismo de comónadas $\varphi : LR \rightarrow G$, entonces podemos definir la transformación natural

$$R \xrightleftharpoons[\alpha]{\eta R} RLR \xrightarrow{R\varphi} RG \quad (4)$$

Para comprobar que conmuta el primer diagrama en (2), consideremos un objeto X de \mathcal{A} y calculamos

$$\begin{aligned} R\Delta_X \circ \alpha_X &= R\Delta_X \circ R\varphi_X \circ \eta_{RX} \\ &= R\varphi_X^2 \circ RL\eta_{RX} \circ \eta_{RX} && (\varphi \text{ es de comónadas}) \\ &= R\varphi_{GX} \circ RLR\varphi_X \circ RL\eta_{RX} \circ \eta_{RX} && (\varphi_X^2 = \varphi_{GX} \circ LR\varphi_X) \\ &= R\varphi_{GX} \circ RLR\varphi_X \circ \eta_{RLRX} \circ \eta_{RX} && (\eta \text{ es natural}) \\ &= R\varphi_{GX} \circ \eta_{RGX} \circ R\varphi_X \circ \eta_{RX} && (\eta \text{ es natural}) \\ &= \alpha_{GX} \circ \alpha_X \end{aligned}$$

Para el segundo diagrama en (2), tenemos

$$\begin{aligned} R\varepsilon_X \circ \alpha_X &= R\varepsilon_X \circ R\varphi_X \circ \eta_{RX} \\ &= R\varepsilon_X \circ \eta_{RX} && (\varphi \text{ es de comónadas}) \\ &= id_{RX} && (\text{por adjunción}) \end{aligned}$$

En sentido inverso, partiendo de una transformación natural $\alpha : R \rightarrow RG$ que verifique (2), definimos la transformación natural

$$LR \xrightleftharpoons[\varphi]{L\alpha} LRG \xrightarrow{\epsilon G} G \quad (5)$$

Para demostrar que φ , definida en (5), es un homomorfismo de comónadas, necesitaremos utilizar que, para cada objeto X de \mathcal{A} , se tienen las igualdades

$$\varphi_X^2 = \epsilon_{G^2X} \circ L\alpha_{GX} \circ LR\epsilon_{GX} \circ LRL\alpha_X \quad (6)$$

y

$$\varphi_X^2 = G\epsilon_{GX} \circ GL\alpha_X \circ \epsilon_{GLRX} \circ L\alpha_{RLX},$$

por definición de φ . Realizamos el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \varphi_X^2 \circ L\eta_{RX} &= \epsilon_{G^2X} \circ L\alpha_{GX} \circ LR\epsilon_{GX} \circ LRL\alpha_X \circ L\eta_{RX} && (\text{por (6)}) \\ &= \epsilon_{G^2X} \circ L\alpha_{GX} \circ LR\epsilon_{GX} \circ L\eta_{RGX} \circ L\alpha_X && (\eta \text{ es natural}) \\ &= \epsilon_{G^2X} \circ L\alpha_{GX} \circ L\alpha_X && (R\epsilon_{GX} \circ \eta_{RGX} = id_{RGX}) \\ &= \epsilon_{G^2X} \circ LR\Delta_X \circ L\alpha_X && (\alpha_{GX} \circ \alpha_X = R\Delta_X \circ \alpha_X) \\ &= \Delta_X \circ \epsilon_{GX} \circ L\alpha_X && (\epsilon \text{ es natural}) \\ &= \Delta_X \circ \varphi_X \end{aligned}$$

Para comprobar la segunda condición que define un homomorfismo de comónadas, tenemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon_X \circ \varphi_X &= \varepsilon_X \circ \epsilon_{GX} \circ L\alpha_X \\
&= \epsilon_X \circ LR\varepsilon_X \circ L\alpha_X & (\epsilon \text{ es natural}) \\
&= \epsilon_X & (R\varepsilon_X \circ \alpha_X = id_{RX})
\end{aligned}$$

Bien, partamos ahora de un homomorfismo de comónadas $\varphi : LR \rightarrow G$ y construyamos la transformación natural $\alpha : R \rightarrow RG$ de acuerdo con (4). Consideremos ahora el homomorfismo de comónadas, digamos φ' , definido, a partir de tal α , en (5), y veamos que coincide con el morfismo original φ . Para ello, calculemos, para un objeto X de \mathcal{A} ,

$$\begin{aligned}
\varphi'_X &= \epsilon_{GX} \circ L\alpha_X \\
&= \epsilon_{GX} \circ LR\varphi_X \circ L\eta_{RX} \\
&= \varphi_X \circ \epsilon_{LRX} \circ L\eta_{RX} & (\epsilon \text{ es natural}) \\
&= \varphi_X
\end{aligned}$$

Por último hemos de ver que, partiendo de una transformación natural $\alpha : R \rightarrow RG$ que satisfaga (2) y construyendo sucesivamente el morfismo de comónadas φ según (5), y la nueva transformación natural, digamos α' , de acuerdo con (4), volvemos a obtener el α original. Esto se sigue del siguiente cálculo, para X un objeto de \mathcal{A} :

$$\begin{aligned}
\alpha'_X &= R\varphi_X \circ \eta_{RX} \\
&= R\epsilon_{GX} \circ RL\alpha_X \circ \eta_{RX} & (\eta \text{ es natural}) \\
&= R\epsilon_{GX} \circ \eta_{RGX} \circ \alpha_X \\
&= \alpha_X
\end{aligned}$$

Abordemos ahora la demostración de que hay una correspondencia biunívoca entre las transformaciones descritas en (A) y las descritas en (C). Así, si partimos de un homomorfismo de comónadas $\varphi : LR \rightarrow G$, definimos la transformación natural

$$L \begin{array}{c} \xrightarrow{L\eta} \\ \searrow \beta \nearrow \\ \end{array} LRL \xrightarrow{\varphi L} GL \quad (7)$$

y comprobemos que verifica que los diagramas (3) conmutan. Tomamos, pues, un objeto Y de \mathcal{B} y calculamos

$$\begin{aligned}
\Delta_{LY} \circ \beta_Y &= \Delta_{LY} \circ \varphi_{LY} \circ L\eta_Y \\
&= \varphi_{LY}^2 \circ L\eta_{RLY} \circ L\eta_Y & (\varphi \text{ es de comónadas}) \\
&= G\varphi_{LX} \circ \varphi_{LRLY} \circ L\eta_{RLY} \circ L\eta_Y & (\varphi_{LY}^2 = G\varphi_{LX} \circ \varphi_{LRLY}) \\
&= G\varphi_{LY} \circ \varphi_{RLRY} \circ LRL\eta_Y \circ L\eta_Y & (\eta \text{ es natural}) \\
&= G\varphi_{LY} \circ GL\eta_Y \circ \varphi_{LY} \circ L\eta_Y & (\varphi \text{ es natural}) \\
&= G\beta_Y \circ \beta_Y
\end{aligned}$$

Para comprobar que es segundo diagrama de (3) conmuta, hacemos el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{LY} \circ \beta_Y &= \varepsilon_{LY} \varphi_{LY} \circ L\eta_Y \\
&= \epsilon_{LY} \circ L\eta_Y & (\varphi \text{ es de comónadas}) \\
&= id_{LY} & (\text{por adjunción})
\end{aligned}$$

Recíprocamente, a cada transformación natural $\beta : L \rightarrow GL$ que haga conmutar los diagramas (3), le asignamos la transformación natural φ definida por

$$LR \xrightarrow{\beta R} GLR \xrightarrow{G\epsilon} G \quad (8)$$

φ

que vamos a comprobar seguidamente es un homomorfismo de comónadas. Para la primera condición requerida para ser un homomorfismo de comónadas calculamos, para un objeto X de \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \varphi_X^2 \circ L\eta_{RX} &= G\varphi_X \circ \varphi_{LRX} \circ L\eta_{RX} \\ &= G^2\epsilon_X \circ G\beta_{RX} \circ G\epsilon_{LRX} \circ \beta_{RLRX} \circ L\eta_{RX} \\ &= G^2\epsilon_X \circ G\beta_{RX} \circ G\epsilon_{LRX} \circ GL\eta_{RX} \circ \beta_{RX} && (\beta \text{ es natural}) \\ &= G^2\epsilon_X \circ G\beta_{RX} \circ \beta_{RX} && (\epsilon_{LRX} \circ L\eta_{RX} = id_{LRX}) \\ &= G^2\epsilon_X \circ \Delta_{LRX} \circ \beta_{RX} && (\text{por (3)}) \\ &= \Delta_X \circ G\epsilon_X \circ \beta_{RX} && (\Delta \text{ es natural}) \\ &= \Delta_X \circ \varphi_X \end{aligned}$$

Una comprobación de la segunda condición para ser homomorfismo de comónadas es la siguiente:

$$\begin{aligned} \varepsilon_X \circ \varphi_X &= \varepsilon_X \circ G\epsilon_X \circ \beta_{RX} \\ &= \epsilon_X \circ \varepsilon_{LRX} \circ \beta_{RX} && (\varepsilon \text{ es natural}) \\ &= \epsilon_X && (\text{por (3)}) \end{aligned}$$

Veamos por último que estas correspondencias son mutuamente inversas. Así pues, partiendo de un homomorfismo de comónadas $\varphi : LR \rightarrow G$, y siendo β la transformación natural definida en (7), tenemos, para X un objeto de \mathcal{A} , y φ' el homomorfismo de comónadas definido a partir de β según (8):

$$\begin{aligned} \varphi'_X &= G\epsilon_X \circ \beta_{RX} \\ &= G\epsilon_X \circ \varphi_{LRX} \circ L\eta_{RX} \\ &= \varphi_X \circ LR\epsilon_X \circ L\eta_{RX} && (\varphi \text{ es natural}) \\ &= \varphi_X && (R\epsilon_X \circ \eta_{RX} = id_{RX}) \end{aligned}$$

Y partiendo de una transformación natural $\beta : L \rightarrow GL$ sujeta a las condiciones (3), tenemos definido un homomorfismo de comónadas φ según (8), que permite definir, de acuerdo con (7), una transformación natural β' . Tenemos, para cada objeto Y de \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} \beta'_Y &= \varphi_{LY} \circ L\eta_Y \\ &= G\epsilon_{LY} \circ \beta_{RLY} \circ L\eta_Y \\ &= \beta_Y \circ \epsilon_{LY} \circ L\eta_Y && (\beta \text{ es natural}) \\ &= \beta_Y \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba. □

Conviene que nos dotemos de una terminología cómoda para referirnos a la situación descrita por la Proposición 1.1. Así, si el dato de partida es un homomorfismo de comónadas $\varphi : LR \rightarrow G$, entonces nos referiremos a las transformaciones naturales $\alpha : R \rightarrow RG$ y $\beta : L \rightarrow GL$ como la *representación co-inducida* (resp. *representación inducida*) de φ . En su conjunto, hablaremos de las *representaciones* de φ . Cuando partamos de una transformación natural α sujeta a las condiciones (2), o de una transformación natural β sujeta a (3), entonces el homomorfismo de comónadas correspondiente $\varphi : LR \rightarrow G$ se llamará *transformación canónica* asociada a α (resp. β).

Dado un homomorfismo de comónadas $\varphi : LR \rightarrow G$ es útil escribir las ecuaciones que lo ligán con sus representaciones asociadas $\alpha : R \rightarrow RG$ y $\beta : L \rightarrow GL$. Concretamente, de la demostración de la Proposición 1.1, deducimos que

$$\begin{aligned} \alpha &= R\varphi \circ \eta R & \varphi &= \epsilon G \circ L\alpha \\ \beta &= \varphi L \circ L\eta & \varphi &= G\epsilon \circ \beta R \end{aligned} \tag{9}$$

Pasamos a deducir de la Proposición 1.1 el resultado fundamental de esta sección, que puede también obtenerse de [9, Theorem II.1.1]. Por otra parte, B. Mesablishvili nos ha comunicado que el Teorema 1.2 puede deducirse de cierta meta-adjunción, descrita en [2, pág. 11], y para cuya prueba remite el mismo Beck a [10], entre ciertas meta-categorías adecuadas, de una parte $Adj(\mathcal{A})$, cuyos objetos son adjunciones, y de otra $Trip(\mathcal{A})^{op}$, cuyos objetos son mónadas (o triples), siempre con los morfismos adecuados.

Teorema 1.2. *Dada una comónada G sobre \mathcal{A} y un funtor $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, si L tiene un adjunto por la derecha $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, entonces existe una correspondencia biyectiva entre funtores $K : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}_G$ que hacen conmutar (1) y homomorfismos de comónadas $\varphi : LR \rightarrow G$.*

Demostración. Dado que, según la Proposición 1.1, existe una correspondencia biunívoca entre homomorfismos de comónadas $\varphi : LR \rightarrow G$ y transformaciones naturales $\beta : L \rightarrow GL$ que hagan conmutar (3), basta con que demostremos que estas últimas están en correspondencia biunívoca con los funtores $K : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}_G$ tales que $UK = L$. Esta correspondencia va como sigue: dada $\beta : L \rightarrow GL$, definimos $KY = (LY, \beta_Y)$ para cada objeto Y de \mathcal{B} , y $Kf = Lf$ para cada morfismo f en \mathcal{B} . Los diagramas (3) muestran entonces que (LY, β_Y) es una G -coálgebra y la naturalidad de β implica que Lf es un homomorfismo de G -coálgebras. Recíprocamente, dado el funtor $K : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}_G$ definimos, para cada objeto Y de \mathcal{B} , $\beta_Y : LY \rightarrow GLY$ como el homomorfismo estructura de la G -coálgebra KY . Es fácil comprobar que esta asignación define una transformación natural $\beta : L \rightarrow GL$ que hace conmutar (3). \square

El Teorema 1.2 puede ser considerado como una generalización de [1, Theorem 3.3].

Corolario 1.3. *[1, Theorem 3.3] Sean H y G comónadas sobre una categoría \mathcal{A} . Existe una correspondencia biunívoca entre homomorfismos de comónadas $\varphi : H \rightarrow G$ y funtores*

$K : \mathcal{A}_H \rightarrow \mathcal{A}_G$ que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_H & \xrightarrow{K} & \mathcal{A}_G \\ & \searrow U_H \quad \swarrow U_G & \\ & \mathcal{A} & \end{array}$$

donde U_H y U_G son los funtores que olvidan.

Demostración. El funtor U_H tiene un adjunto por la derecha F_H tal que la comónada asociada es H [1, Sección 3.2]. El corolario se sigue ahora del Teorema 1.2 tomando $\mathcal{B} = \mathcal{A}_H$ y $L = U_H$. \square

2 Adjunciones y equivalencias

Partimos de una comónada (G, Δ, ε) sobre una categoría \mathcal{A} , y $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ un funtor. Supondremos, además, que L tiene un adjunto por la derecha $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. De acuerdo con el Teorema 1.2, los funtores $K : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}_G$ tales que $UK = L$, para $U : \mathcal{A}_G \rightarrow \mathcal{A}$ el funtor que olvida, están en correspondencia biunívoca con los homomorfismos de comónadas $\varphi : LR \rightarrow G$. Haremos patente esta dependencia escribiendo K_φ para el funtor correspondiente a φ . Explícitamente, el funtor K_φ está definido como

$$K_\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}_G \quad (Y \mapsto (LY, \varphi_{LY} \circ L\eta_Y)),$$

sobre objetos, y como L sobre homomorfismos. Tendremos presentes la Proposición 1.1 y las ecuaciones (9) que relacionan φ con sus representaciones $\alpha : R \rightarrow RG$ y $\beta : L \rightarrow GL$.

Comenzamos estudiando cuándo K_φ tiene un adjunto por la derecha. La siguiente proposición es un caso particular de [9, Theorem A.1]. Damos una prueba elemental en nuestro caso.

Proposición 2.1. *Supongamos que para cada G -coálgebra (X, x) existe en \mathcal{B} el igualador del par de morfismos $\alpha_X, Rx : RX \rightarrow RGX$. Entonces el funtor $K_\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}_G$ tiene un adjunto por la derecha $D_\varphi : \mathcal{A}_G \rightarrow \mathcal{B}$, cuyo valor en (X, x) es el igualador*

$$D_\varphi X \xrightarrow{eq_X} RX \xrightleftharpoons[Rx]{\alpha_X} RGX \quad (10)$$

Demostración. Dados objetos X de \mathcal{A} e Y de \mathcal{B} , denotemos por $\Phi : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(LY, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, RX)$ el isomorfismo de adjunción, que, en términos de la counidad η , viene definido por $\Phi(h) = Rh \circ \eta_Y$ para $h : LY \rightarrow X$. Consideremos el siguiente diagrama

conmutativo de aplicaciones entre conjuntos:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hom}_{\mathcal{A}_G}(K_\varphi Y, X) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, D_\varphi X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Hom}_{\mathcal{A}}(LY, X) & \xrightarrow{\Phi} & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, RX) \\
\begin{array}{c} x \circ - \\ \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(LY, GX) \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow G(-) \circ \beta_X \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, Rx) \\ \downarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, \alpha_X) \\ \downarrow \end{array} \\
& \xrightarrow{\Phi} & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, RGX),
\end{array} \tag{11}$$

donde la flecha discontinua no está aún definida. Comprobemos que el cuadrado inferior conmuta serialmente, en el sentido de [1, page 112]: partiendo de $h : LY \rightarrow X$, tenemos

$$\begin{aligned}
[\Phi \circ (x \circ -)](h) &= \Phi(x \circ h) \\
&= Rx \circ Rh \circ \eta_Y \\
&= \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, Rx)(Rh \circ \eta_Y) \\
&= [\text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, Rx) \circ \Phi](h)
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
[\Phi \circ (G(-) \circ \beta_Y)](h) &= \Phi(Gh \circ \beta_Y) \\
&= RGh \circ R\beta_Y \circ \eta_Y \\
&= RGh \circ R\varphi_{LY} \circ RL\eta_Y \circ \eta_Y \quad (\beta_Y = \varphi_{LY} \circ L\eta_Y) \\
&= RGh \circ R\varphi_{LY} \circ \eta_{RLY} \circ \eta_Y \quad (\eta \text{ es natural}) \\
&= R\varphi_X \circ RLRh \circ \eta_{RLY} \circ \eta_Y \quad (\varphi \text{ es natural}) \\
&= R\varphi_X \circ \eta_{RX} \circ Rh \circ \eta_Y \quad (\eta \text{ es natural}) \\
&= \alpha_X \circ Rh \circ \eta_Y \\
&= \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, \alpha_X)(Rh \circ \eta_Y) \\
&= [\text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, \alpha_X) \circ \Phi](h).
\end{aligned}$$

Ahora bien, los dos lados verticales son igualadores, el de la izquierda por definición de homomorfismo de G -coálgebras, y el de la derecha, por la propiedad universal del igualador (10). Por tanto, el isomorfismo natural $\Phi : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(LY, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, RX)$ induce, por restricción, un isomorfismo natural $\Phi : \text{Hom}_{\mathcal{A}_G}(K_\varphi Y, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(Y, D_\varphi X)$. \square

Observación 2.2. Si tomamos en el diagrama (11) $X = K_\varphi Y$, para un objeto Y de \mathcal{B} , dado que $id_{K_\varphi Y}$ es un homomorfismo de G -coálgebras, deducimos que $\eta_Y = \Phi(id_{K_\varphi Y})$ se factoriza a través de $D_\varphi Y$, de manera que la unidad de la adjunción $K_\varphi \dashv D_\varphi$, denotada por $\hat{\eta}$, viene determinada unívocamente en Y por la propiedad universal de un igualador, según el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
D_\varphi K_\varphi Y & \longrightarrow & RLY & \xrightleftharpoons[R\beta_Y]{\alpha_{LY}} & RGLY \\
& \nwarrow \hat{\eta}_Y & \uparrow \eta_Y & & \\
& & Y & &
\end{array} \tag{12}$$

Para hacer explícita la counidad $\widehat{\epsilon}$ en un objeto (X, x) de \mathcal{A}_G , aplicamos el funtor K_φ al igualador (10) y obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} K_\varphi D_\varphi X & \xrightarrow{Leq_X} & LRX & \xrightleftharpoons[L R x]{L \alpha_X} & LRGX \\ & \searrow \widehat{\epsilon}_X & \downarrow \epsilon_X & & \\ & & X & & \end{array} \quad (13)$$

es decir, $\widehat{\epsilon}_X = \epsilon_X \circ Leq_X$.

Nuestro próximo objetivo es demostrar que D_φ es un funtor pleno y fiel si, y sólo si, φ es un isomorfismo de mónadas y el funtor L preserva los igualadores (10). Trabajaremos primero para una G -coálgebra X , y luego argumentaremos globalmente. Supongamos que existe en \mathcal{A} el igualador

$$EX \xrightarrow{eq'_X} LRX \xrightleftharpoons[L R x]{L \alpha_X} LRGX \quad (14)$$

Consideramos el siguiente diagrama en \mathcal{A} :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & LRGX & & \\ & & & & \uparrow L R x & & \\ & & & & L \alpha_X & & \\ & & & & \downarrow \varphi_{GX} & & \\ & & & & G^2 X & & \\ & & & & \uparrow G x & & \\ & & & & \Delta_X & & \\ & & & & \downarrow \varphi_X & & \\ & & & & GX & & \\ & & & & \uparrow x & & \\ & & & & X & & \\ & & & & \uparrow \nu_X & & \\ & & & & EX & & \\ & & & & \uparrow \Psi_X & & \\ & & & & K_\varphi D_\varphi X & & \\ & & & & \downarrow \widehat{\epsilon}_X & & \\ & & & & X & & \\ & & & & \uparrow \epsilon_X & & \\ & & & & EX & & \\ & & & & \uparrow Leq_X & & \\ & & & & LRX & & \end{array} \quad (15)$$

En este diagrama, Ψ está determinada por Leq_X en virtud de la propiedad universal del igualador (14). Para definir ν_X , necesitamos comprobar que el cuadrado (1) conmuta serialmente. Pero eso es una consecuencia sencilla de la naturalidad de φ y del hecho de ser un homomorfismo de comónadas. De esta manera, ν_X está determinado por $\varphi_X \circ eq'_X$ por la propiedad universal del igualador canónicamente asociado a la coálgebra (X, x) (ver [1, Proposition 3.3.4]). Comprobemos ahora que el cuadrado (2) es conmutativo, esto es, que

$$\widehat{\epsilon}_X = \nu_X \circ \Psi_X \quad (16)$$

Es suficiente con comprobar que la igualdad (16) es cierta tras componer con el monomor-

fismo x . Realizamos seguidamente dicho cálculo:

$$\begin{aligned}
x \circ \widehat{\epsilon}_X &= x \circ \epsilon_X \circ Leq_X \\
&= \epsilon_{GX} \circ LRx \circ Leq_X && (\epsilon \text{ es natural}) \\
&= \epsilon_{GX} \circ LR\alpha_X \circ Leq_X && (eq_X \text{ iguala } (Rx, \alpha_X)) \\
&= \epsilon_{GX} \circ LR\varphi_X \circ L\eta_{RX} \circ Leq_X \\
&= \varphi_X \circ \epsilon_{LRX} \circ L\eta_{RX} \circ Leq_X && (\epsilon \text{ es natural}) \\
&= \varphi_X \circ Leq_X \\
&= \varphi_X \circ eq'_X \circ \Psi_X \\
&= x \circ \nu_X \circ \Psi_X
\end{aligned}$$

Lema 2.3. *Supongamos que φ_X es un monomorfismo. En el diagrama (15), $\widehat{\epsilon}_X$ es un isomorfismo si, y sólo si, Ψ_X y ν_X son isomorfismos.*

Demostración. Vamos a demostrar que si $\widehat{\epsilon}_X$ es un isomorfismo, entonces

$$K_\varphi D_\varphi X \xrightarrow{Leq_X} LRX \xrightleftharpoons[L Rx]{L\alpha_X} LGRX$$

es un igualador. Esto implica que Ψ_X es entonces un isomorfismo, de donde el lema se sigue fácilmente. Sea, por tanto, $f : Y \rightarrow LRY$ un homomorfismo en \mathcal{A} tal que $LRx \circ f = L\alpha_X \circ f$. Existe un único $\widehat{f} : Y \rightarrow EX$ tal que $eq'_X \circ \widehat{f} = f$. Definimos

$$\widetilde{f} = \widehat{\epsilon}_X^{-1} \circ \nu_X \circ \widehat{f} : Y \longrightarrow K_\varphi D_\varphi X$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_X \circ Leq_X \circ \widetilde{f} &= \varphi_X \circ Leq_X \circ \widehat{\epsilon}_X^{-1} \circ \nu_X \circ \widehat{f} \\
&= \varphi_X \circ eq'_X \circ \Psi_X \circ \widehat{\epsilon}_X^{-1} \circ \nu_X \circ \widehat{f} \\
&= x \circ \nu_X \circ \Psi_X \circ \widehat{\epsilon}_X^{-1} \circ \nu_X \circ \widehat{f} \\
&= x \circ \nu_X \circ \widehat{f} && (\text{por (16)}) \\
&= \varphi_X \circ eq'_X \circ \widehat{f} \\
&= \varphi_X \circ f
\end{aligned}$$

Como φ_X es un monomorfismo, deducimos que $Leq_X \circ \widetilde{f} = f$. Supongamos ahora que $g : Y \rightarrow K_\varphi D_\varphi X$ es tal que $Leq_X \circ g = f$. Basta con demostrar que $\widehat{\epsilon}_X \circ g = \nu_X \circ \widehat{f}$. Dado que x es un monomorfismo, es suficiente con que comprobemos que $x \circ \widehat{\epsilon}_X \circ g = x \circ \nu_X \circ \widehat{f}$:

$$\begin{aligned}
x \circ \widehat{\epsilon}_X \circ g &= x \circ \nu_X \circ \Psi_X \circ g && (\text{por (16)}) \\
&= \varphi_X \circ eq'_X \circ \Psi_X \circ g \\
&= \varphi_X \circ Leq_X \circ g \\
&= \varphi_X \circ f \\
&= \varphi_X \circ eq'_X \circ \widehat{f} \\
&= x \circ \nu_X \circ \widehat{f}
\end{aligned}$$

□

Observación 2.4. Obviamente, el Lema 2.3 puede re-enunciarse diciendo que, bajo la hipótesis de ser φ_X un monomorfismo, $\widehat{\epsilon}_X$ es un isomorfismo si, y sólo si, L preserva el igualador (10), y ν_X es un isomorfismo.

Recordemos que un funtor adjunto por la derecha es fiel y pleno si y sólo si la counidad es un isomorfismo [3, Proposition 3.4.1]

Teorema 2.5. Sea $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ un funtor con un adjunto por la derecha $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, y $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ cualquier comónada. Consideremos un funtor $K_\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}_G$ que hace conmutar (1) con homomorfismo de comónadas correspondiente $\varphi : LR \rightarrow G$, y sean $\alpha : R \rightarrow RG$, $\beta : L \rightarrow GL$ sus representaciones. Supongamos que cada G -coálgebra (X, x) , existe en \mathcal{B} el igualador de α_X, Rx . Entonces el funtor adjunto por la izquierda $D_\varphi : \mathcal{A}_G \rightarrow \mathcal{B}$ al funtor K_φ es fiel y pleno si, y sólo si, L preserva los igualadores de la forma (10) y φ es un isomorfismo de comónadas.

Demostración. Sea X cualquier objeto de \mathcal{A} . Un sencillo cálculo muestra que

$$\begin{array}{ccccc} RX & \xrightarrow{\alpha_X} & RGX & \xrightleftharpoons[R\Delta_X]{\alpha_{GX}} & RG^2X \\ & \searrow R\varepsilon_X & & \nwarrow RG\varepsilon_X & \\ & & & & \end{array} \quad (17)$$

es un igualador contractible en el sentido de [1, Section 3.3]. En efecto,

$$R\varepsilon_X \circ \alpha_X = id_{RX} \quad (\text{por (2)}),$$

$$RG\varepsilon_X \circ R\Delta_X = id_{RGX} \quad (\text{por (2)}),$$

$$RG\varepsilon_X \circ \alpha_{GX} = \alpha_X \circ R\varepsilon_X \quad (\alpha \text{ es natural}).$$

El igualador (17) muestra que $eq_{GX} = \alpha_X$ y $D_\varphi GX = RX$. De aquí, aplicando el funtor L a (17), y en vista de (13), obtenemos que $\widehat{\epsilon}_{GX} = \epsilon_{GX} \circ L\alpha_X = \varphi_X$. Por tanto, si D_φ es fiel y pleno, entonces $\widehat{\epsilon}_{GX} = \varphi_X$ es un isomorfismo para toda G -coálgebra (X, x) . Del Lema 2.3 deducimos también que L preserva el igualador (10). El recíproco es consecuencia directa del Lema 2.3 y la ecuación (16). \square

Un isomorfismo de comónadas $\varphi : LR \rightarrow G$ induce [1, Theorem 3.3] una equivalencia de categorías $\mathcal{A}_{LR} \cong \mathcal{A}_G$. Combinando este hecho con el Teorema 2.5 y el Teorema de Beck [1, Theorem 3.10], podemos obtener el Teorema 2.6. Preferimos, si el lector nos lo permite, incluir una demostración explícita.

Teorema 2.6. Sea $L : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ un funtor con un adjunto por la derecha $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, y $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ cualquier comónada. Consideremos un funtor $K_\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}_G$ que hace conmutar (1) con homomorfismo de comónadas correspondiente $\varphi : LR \rightarrow G$, y sean $\alpha : R \rightarrow RG$, $\beta : L \rightarrow GL$ sus representaciones. Supongamos que cada G -coálgebra (X, x) , existe en \mathcal{B} el igualador de α_X, Rx . Entonces el funtor K_φ es una equivalencia de categorías entre \mathcal{B} y \mathcal{A}_G si, y sólo si, L preserva los igualadores de la forma (10), refleja isomorfismos, y φ es un isomorfismo de comónadas.

Demostración. Observemos primero que para cada objeto Y de \mathcal{B} , la unidad $\hat{\eta}_Y$ de la adjunción $K_\varphi \dashv D_\varphi$ demostrada en la Proposición 2.1 viene dada, según la Observación 2.2, como el igualador en la fila horizontal del diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & RLLRY \\
 & & & \nearrow \eta_{RLY} & \searrow R\varphi_{LY} \\
 D_\varphi K_\varphi Y & \xrightarrow{\quad} & RLY & \xrightarrow{RL\eta_Y \alpha_{LY}} & RGLY \\
 & \nwarrow \hat{\eta}_Y & \nearrow \eta_Y & \xrightarrow{R\beta_Y} & \\
 & & Y & &
 \end{array} \tag{18}$$

Si aplicamos el funtor L al diagrama conmutativo (18) obtenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & LRLRY \\
 & & & \nearrow L\eta_{RLY} & \searrow LR\varphi_{LY} \\
 LD_\varphi K_\varphi Y & \xrightarrow{\quad} & LRLY & \xrightarrow{LRL\eta_Y L\alpha_{LY}} & LRGLY \\
 & \nwarrow L\hat{\eta}_Y & \nearrow L\eta_Y & \xrightarrow{LR\beta_Y} & \\
 & & LY & &
 \end{array}$$

(19)

también conmutativo. Aquí, los morfismos ϵ_{LRLY} y ϵ_{LY} hacen que la diagonal sea un igualador contractible. Si K_φ es una equivalencia de categorías, entonces su adjunto por la derecha D_φ es obviamente fiel y pleno y, en virtud del Teorema 2.5, φ es un isomorfismo natural y L preserva los igualadores de la forma (10). Puesto que el funtor que olvida $U_G : \mathcal{A}_G \rightarrow \mathcal{A}$ refleja isomorfismos [1, Proposition 3.3.1], deducimos de $L = U_G \circ K_\varphi$ que L refleja isomorfismos. Recíprocamente, si φ es un isomorfismo natural y L preserva los igualadores (10) y refleja isomorfismos, entonces, por el Teorema 2.5, la counidad de la adjunción $K_\varphi \dashv D_\varphi$ es un isomorfismo. Del diagrama (19) deducimos que $L\hat{\eta}_Y$ es un isomorfismo y, como L refleja isomorfismos, $\hat{\eta}_Y$ ha de ser un isomorfismo, con lo que hemos demostrado que la unidad de la adjunción $K_\varphi \dashv D_\varphi$ es también un isomorfismo natural. Por tanto, K_φ es una equivalencia de categorías. \square

3 Coanillos sobre anillos firmes

Sea A un anillo, del que no suponemos posea un uno. Por $\overline{\text{Mod}}_A$ denotamos la categoría de todos los A -módulos por la derecha. Podemos también considerar módulos por la izquierda o bimódulos. El producto tensor sobre A se denotará mediante $- \otimes_A -$. Un A -módulo por la derecha M se dirá *firme* [16] si el homomorfismo «multiplicación» $\varpi_M^+ : M \otimes_A A \rightarrow M$ es biyectivo. Su inverso se denotará por $d_M^+ : M \rightarrow M \otimes_A A$. Los módulos firmes por la izquierda se definen análogamente, con notaciones ϖ_M^- y d_M^- para el homomorfismo «multiplicación» y su inverso, respectivamente. Obviamente, $\varpi_A^+ = \varpi_A^-$, con lo que, en caso de ser este homomorfismo multiplicación biyectivo, se tiene $d_A^+ = d_A^-$. Diremos entonces

que A es un *anillo firme*. Si A es firme, entonces la subcategoría plena \mathbf{Mod}_A de $\overline{\mathbf{Mod}}_A$ cuyos objetos son todos los módulos firmes una categoría abeliana [16, (4.6)], [14, Corollary 1.3], [15, Proposition 2.7], aunque en general los igualadores no necesariamente se calculan en grupos abelianos, debido esencialmente a la falta de exactitud del funtor $- \otimes_A A$.

Supongamos que A es un anillo firme. Un A -*coanillo* [17] es un A -bimódulo \mathfrak{C} dotado de dos homomorfismos de A -bimódulos $\Delta_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}$, y $\varepsilon_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \rightarrow A$ que verifican las siguientes ecuaciones:

$$(\mathfrak{C} \otimes_A \Delta_{\mathfrak{C}}) \circ \Delta_{\mathfrak{C}} = (\Delta_{\mathfrak{C}} \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \Delta_{\mathfrak{C}} \quad (20)$$

$$(\varepsilon_{\mathfrak{C}} \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \Delta_{\mathfrak{C}} = d_A^-, \quad (\mathfrak{C} \otimes_A \varepsilon_{\mathfrak{C}}) \circ \Delta_{\mathfrak{C}} = d_A^+ \quad (21)$$

En (20) hemos considerado el isomorfismo natural $\mathfrak{C} \otimes_A (\mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}) \cong (\mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}) \otimes_A \mathfrak{C}$ como una igualdad, denotando el «valor común» como $\mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}$. Un cálculo directo, usando (20) y (21) demuestra que cada A -coanillo $(\mathfrak{C}, \Delta_{\mathfrak{C}}, \varepsilon_{\mathfrak{C}})$ determina una comónada sobre \mathbf{Mod}_A definida por el funtor

$$- \otimes_A \mathfrak{C} : \mathbf{Mod}_A \longrightarrow \mathbf{Mod}_A$$

y las transformaciones naturales

$$- \otimes_A \mathfrak{C} \xrightarrow{- \otimes_A \Delta_{\mathfrak{C}}} - \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}$$

$$- \otimes_A \mathfrak{C} \xrightarrow{- \otimes_A \varepsilon_{\mathfrak{C}}} - \otimes_A A \cong id$$

La categoría de coálgebras para esta comónada no es sino la categoría $\mathbf{Comod}_{\mathfrak{C}}$ de los \mathfrak{C} -comódulos por la derecha.

Supongamos ahora dado un segundo anillo firme B , y un $B - A$ -bimódulo Σ firme. Argumentando como en [13], tenemos un par de funtores adjuntos

$$\mathbf{Mod}_B \xrightleftharpoons[\text{Hom}_A(\Sigma, -) \otimes_B B]{- \otimes_B \Sigma} \mathbf{Mod}_A, \quad - \otimes_B \Sigma \dashv \text{Hom}_A(\Sigma, -) \otimes_B B \quad (22)$$

Será útil hacer explícitas la unidad y counidad de la adjunción (22). Para ello, dado $y \in Y$ para Y un B -módulo por la derecha firme, utilizaremos la notación $d_Y^+(y) = y^b \otimes_B b \in Y \otimes_B B$ (suma sobreentendida). Por supuesto, este elemento del producto tensor está determinado por la condición $y^b b = y$. La counidad de la adjunción es

$$\eta_Y : Y \longrightarrow \text{Hom}_A(\Sigma, Y \otimes_B \Sigma) \otimes_B B, \quad \eta_Y(y) = (y^b \otimes_B -) \otimes_B b, \quad (23)$$

y la counidad

$$\epsilon_X : \text{Hom}_A(\Sigma, X) \otimes_B B \otimes_B \Sigma \longrightarrow X, \quad \epsilon_X(f \otimes_B b \otimes_B u) = f(bu). \quad (24)$$

Tenemos entonces la comónada asociada

$$(\text{Hom}_A(\Sigma, -) \otimes_B B \otimes_B \Sigma, \eta_{\text{Hom}_A(\Sigma, -) \otimes_B B \otimes_B \Sigma}, \epsilon)$$

Supongamos ahora dada una estructura de $B - \mathfrak{C}$ -bicomódulo sobre Σ , esto es, un homomorfismo de $B - A$ -bimódulos $\varrho_\Sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma \otimes_A \mathfrak{C}$ que verifica

$$(\varrho_\Sigma \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \varrho_\Sigma = (\Sigma \otimes_A \Delta_{\mathfrak{C}}) \circ \varrho_\Sigma, \quad (\Sigma \otimes_A \varepsilon_{\mathfrak{C}}) \circ \varrho_\Sigma = d_\Sigma^+ \quad (25)$$

Se sigue fácilmente de (25) que la transformación natural

$$\beta : - \otimes_B \Sigma \xrightarrow{- \otimes_B \varrho_\Sigma} - \otimes_B \Sigma \otimes_A \mathfrak{C} \quad (26)$$

satisface las condiciones de la afirmación (C) de la Proposición 1.1 y, en virtud de dicho Teorema, da lugar a un homomorfismo canónico de comónadas **can** definido como la composición

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A(\Sigma, -) \otimes_B B \otimes_B \Sigma & \xrightarrow{\text{Hom}_A(\Sigma, -) \otimes_B B \otimes_B \varrho_\Sigma} & \text{Hom}_A(\Sigma, -) \otimes_B B \otimes_B \Sigma \otimes_A \mathfrak{C} \\ & \searrow \text{can} & \downarrow \epsilon \otimes_A \mathfrak{C} \\ & & - \otimes_A \mathfrak{C}, \end{array}$$

o, si usamos una notación de Heynemann-Sweedler abreviada, tenemos, para cada B -módulo por la derecha X :

$$\text{Hom}_A(\Sigma, X) \otimes_B B \otimes_B \Sigma \xrightarrow{\text{can}_X} X \otimes_A \mathfrak{C}$$

$$f \otimes_B b \otimes_B u \longmapsto f(bu_{[0]}) \otimes_A u_{[1]}$$

donde $\varrho_\Sigma(u) = u_{[0]} \otimes_A u_{[1]}$ (suma sobreentendida).

Podemos ahora aplicar la Proposición 2.1 y el Teorema 2.5 para obtener

Teorema 3.1. *El funtor $- \otimes_B \Sigma : \text{Mod}_B \rightarrow \text{Comod}_{\mathfrak{C}}$ tiene un adjunto por la derecha*

$$\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, -) \otimes_B B : \text{Comod}_{\mathfrak{C}} \longrightarrow \text{Mod}_B$$

*Este funtor es fiel y pleno si, y sólo si, **can** es un isomorfismo natural y $- \otimes_B \Sigma : \text{Mod}_B \rightarrow \text{Mod}_A$ preserva el igualador*

$$\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(\Sigma, X) \otimes_B B \longrightarrow \text{Hom}_A(\Sigma, X) \otimes_B B \xrightleftharpoons[\text{Hom}_A(\Sigma, \varrho_X) \otimes_B B]{\alpha_X} \text{Hom}_A(\Sigma, X \otimes_A \mathfrak{C}) \otimes_B B \quad (27)$$

para cada \mathfrak{C} -comódulo por la derecha (X, ϱ_X) , donde $\alpha_X(f \otimes_B b) = [(f \otimes_A \mathfrak{C}) \circ \varrho_\Sigma] \otimes_B b$ para $f \otimes_B b \in \text{Hom}_A(\Sigma, X) \otimes_B B$.

Demostración. Basta con comprobar que, en la presente situación, α_X , tal como aparece definido en general en (9), está dado en la manera que afirma el enunciado, y que $- \otimes_B B$ es exacto por la izquierda puesto que es adjunto por la derecha del funtor inclusión $J : \text{Mod}_B \rightarrow \overline{\text{Mod}}_B$. \square

El Teorema 2.6 tiene la siguiente consecuencia:

Teorema 3.2. *Sea Σ un $B - \mathfrak{C}$ -bicomódulo. El funtor $- \otimes_B \Sigma : \mathbf{Mod}_B \rightarrow \mathbf{Comod}_{\mathfrak{C}}$ es una equivalencia de categorías si, y sólo si, $- \otimes_B \Sigma : \mathbf{Mod}_B \rightarrow \mathbf{Mod}_A$ preserva los igualadores de la forma (27), refleja isomorfismos y la transformación canónica can es un isomorfismo natural.*

Vamos ahora a deducir algunos de los resultados fundamentales de [13]. Escribamos $\Sigma^* = \text{Hom}_A(\Sigma, A)$, y supongamos que A es un anillo con unidad. El B -bimódulo $\Sigma \otimes_A \Sigma^*$ tiene una estructura de B -anillo (sin uno, en general), con multiplicación asociativa definida por

$$\mu(x \otimes_A \phi \otimes_B y \otimes_A \psi) = x \phi(y) \otimes_A \psi = x \otimes_A \phi(y) \psi, \quad (x \otimes_A \phi \otimes_B y \otimes_A \psi \in \Sigma \otimes_A \Sigma^* \otimes_B \Sigma \otimes_A \Sigma^*)$$

La situación tratada en [13] parte de un homomorfismo de anillos $\iota : B \rightarrow \Sigma \otimes_A \Sigma^*$, lo que permite demostrar que existe un isomorfismo natural

$$\text{Hom}_A(\Sigma, -) \otimes_B B \simeq - \otimes_A \Sigma^* \otimes_B B \quad (h \otimes_B b \mapsto h(e_c) \otimes_A e_c^* \otimes_B b^c) \quad (28)$$

Aquí, estamos usando la notación $\iota(b) = e_b \otimes_B e_b^*$ para $b \in B$ (suma sobreentendida). De (28) deducimos, usando la notación $\Sigma^\dagger = \Sigma^* \otimes_B B$, una adjunción

$$\mathbf{Mod}_B \begin{array}{c} \xrightarrow{- \otimes_B \Sigma} \\ \xleftarrow{- \otimes_A \Sigma^\dagger} \end{array} \mathbf{Mod}_A, \quad - \otimes_B \Sigma \dashv - \otimes_A \Sigma^\dagger \quad (29)$$

cuya counidad es

$$\epsilon_M : M \otimes_A \Sigma^\dagger \otimes_B \Sigma \longrightarrow M \quad (m \otimes_A \phi \otimes_B b \otimes_B x \mapsto m \phi(bx)), \quad (30)$$

y cuya unidad es

$$\eta_N : N \longrightarrow N \otimes_B \Sigma \otimes_A \Sigma^\dagger \quad (n \mapsto n^b \otimes_B e_c \otimes_A e_c^* \otimes_B b^c)$$

A partir del par adjunto (29) tenemos la comónada sobre \mathbf{Mod}_A

$$(- \otimes_A \Sigma^\dagger \otimes_B \Sigma, \eta_{- \otimes_A \Sigma^\dagger \otimes_B \Sigma}, \epsilon) \quad (31)$$

Evaluando en A , obtenemos el A -coanillo $A \otimes_A \Sigma^\dagger \otimes_B \Sigma \cong \Sigma^\dagger \otimes_B \Sigma$ con comultiplicación $\Delta^\dagger = \eta_{A \otimes_A \Sigma^\dagger \otimes_B \Sigma}$ y counidad ϵ_A . Explícitamente,

$$\Delta^\dagger(\phi \otimes_B b \otimes_B u) = \phi \otimes_B c \otimes_B e_d \otimes_A e_d^* \otimes_R (b^c)^d \otimes_B u$$

$$\epsilon_A(\phi \otimes_B b \otimes_B u) = \phi(bu)$$

Además, la comónada (31) está determinada por el *coanillo de comatrices* $(\Sigma^\dagger \otimes_B \Sigma, \Delta^\dagger, \epsilon_A)$, ya que el funtor subyacente a la comónada es un producto tensor sobre A .

Si volvemos ahora al caso en que (Σ, ϱ_Σ) es un $B - \mathfrak{C}$ -bicomódulo, tenemos que la transformación natural (26) da lugar, en virtud de la Proposición 1.1 a un homomorfismo de comónadas can^\dagger definido (ver (9)) en (X, ϱ_X) por

$$\text{can}_X^\dagger = (X \otimes_A \epsilon_A \otimes_A \mathfrak{C}) \circ (X \otimes_A \Sigma^\dagger \otimes_B \varrho_\Sigma)$$

Obviamente,

$$\text{can}_X^\dagger = X \otimes_A \text{can}_A^\dagger \quad (32)$$

donde can_A^\dagger es la aplicación

$$\text{can}_A^\dagger : \Sigma^\dagger \otimes_B \Sigma \longrightarrow \mathfrak{C}, \quad \phi \otimes_B b \otimes_B u \mapsto \phi(bu_{[0]})u_{[1]} \quad (33)$$

que es un homomorfismo de A -coanillos, puesto que can^\dagger es un homomorfismo de comónadas. De acuerdo con la Proposición 2.1, el funtor de comparación $-\otimes_B \Sigma : \mathbf{Mod}_B \rightarrow \mathbf{Comod}_{\mathfrak{C}}$ tiene un adjunto por la derecha, que, sobre un \mathfrak{C} -comódulo por la derecha (X, ϱ_X) , está definida como el igualador en \mathbf{Mod}_B del par $(\alpha_X, \varrho_X \otimes_A \Sigma^\dagger)$. Un sencillo cálculo muestra que, en el presente caso, $\alpha_X = X \otimes_A \alpha_{\Sigma^\dagger}$, donde

$$\alpha_{\Sigma^\dagger} = (\text{can}_A^\dagger \otimes_A \Sigma^\dagger) \circ \eta_{\Sigma^\dagger} \quad (34)$$

De los diagramas (2) deducimos inmediatamente que $(\Sigma^\dagger, \alpha_{\Sigma^\dagger})$ es un $\mathfrak{C} - B$ -bicomódulo. De esta manera, el funtor definido en la Proposición 2.1 es un producto cotensor, ya que está definido por el igualador

$$X \square_{\mathfrak{C}} \Sigma^\dagger \longrightarrow X \otimes_A \Sigma^\dagger \xrightleftharpoons[\varrho_X \otimes_A \Sigma^\dagger]{X \otimes_A \alpha_{\Sigma^\dagger}} X \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A \Sigma^\dagger \quad (35)$$

De la Proposición 2.1 y el Teorema 2.5 deducimos, pues:

Teorema 3.3. [13] *Sea \mathfrak{C} un A -coanillo y Σ un $B - \mathfrak{C}$ -comódulo, firme como B -módulo por la izquierda. Si $\iota : B \rightarrow \Sigma \otimes_A \Sigma^*$ es un homomorfismo de B -anillos, entonces el funtor $-\otimes_B \Sigma : \mathbf{Mod}_B \rightarrow \mathbf{Comod}_{\mathfrak{C}}$ tiene como adjunto por la derecha al funtor producto cotensor $-\square_{\mathfrak{C}} \Sigma^\dagger : \mathbf{Comod}_{\mathfrak{C}} \rightarrow \mathbf{Mod}_B$. Este funtor es fiel y pleno si, y sólo si, $\text{can}_A^\dagger : \Sigma^\dagger \otimes_B \Sigma \rightarrow \mathfrak{C}$ es un isomorfismo de A -coanillos y $-\otimes_B \Sigma : \mathbf{Mod}_B \rightarrow \mathbf{Mod}_A$ preserva los igualadores de la forma (35).*

El Teorema 2.6 da en la presente situación:

Teorema 3.4. *Sea \mathfrak{C} un A -coanillo y Σ un $B - \mathfrak{C}$ -comódulo, firme como B -módulo por la izquierda. Si $\iota : B \rightarrow \Sigma \otimes_A \Sigma^*$ es un homomorfismo de B -anillos, entonces el funtor $-\otimes_B \Sigma : \mathbf{Mod}_B \rightarrow \mathbf{Comod}_{\mathfrak{C}}$ es una equivalencia de categorías si, y sólo si, $\text{can}_A^\dagger : \Sigma^\dagger \otimes_B \Sigma \rightarrow \mathfrak{C}$ es un isomorfismo de A -coanillos y $-\otimes_B \Sigma : \mathbf{Mod}_B \rightarrow \mathbf{Mod}_A$ refleja isomorfismos y preserva los igualadores de la forma (35).*

Observación 3.5. Cuando tanto A como B son anillos con uno, y Σ es finitamente generado y proyectivo como A -módulo por la derecha, entonces $\Sigma \otimes_A \Sigma^* \cong \text{End}(\Sigma_A)$ e $\iota : B \rightarrow \text{End}(\Sigma_A)$ no es sino el homomorfismo que lleva cada $b \in B$ en el endomorfismo multiplicación por b . De hecho, podemos tomar $B = \text{End}(\Sigma_{\mathfrak{C}})$. Esta es la situación considerada en [11, Section 3]. Cuando $\Sigma = A$, cada estructura de \mathfrak{C} -comódulo está determinada por un elemento «como de grupo» $g \in \mathfrak{C}$, y tenemos la situación estudiada en [4, Section 5]. Cuando can_A es un isomorfismo, se dice en [11] o [4], respectivamente, que \mathfrak{C} es un coanillo de Galois (Σ ó g se sobrentienden), o que Σ es un \mathfrak{C} -comódulo de Galois [6]. El coanillo $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$ se suele llamar coanillo de comatrices.

AGRADECIMIENTOS

Quiero dar las gracias M. Mesablishvili por advertirme de cómo buena parte de los resultados de las secciones 1 y 2 son esencialmente conocidos, proporcionándome además las referencias adecuadas. También agradezco a C. Menini su atenta lectura de la primera versión de esta nota, que la llevó a indicarme un error en la demostración del anterior enunciado del Lema 2.3, y otras inexactitudes.

Referencias

- [1] M. Barr and C. Wells, *Toposes, Triples and Theories*, monograph, version 1.1, 7 November 2002. Available at <http://www.cwru.edu/artsci/math/wells/pub/ttt.html>
- [2] J. M. Beck, *Triples, Algebras and Cohomology*, PhD. Thesis, University of Columbia, 1967. Available at Reprints in Theory and Applications of Categories No. 2 (2003), pp. 1-59.
- [3] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1*, Cambridge University Press, 1994.
- [4] T. Brzeziński, *The structure of corings: Induction functors, Maschke-type theorem, and Frobenius and Galois-type properties*. Algebras Rep. Theory **5** (2002), 389–410.
- [5] T. Brzeziński and S. Majid, *Coalgebra bundles*, Commun. Math. Phys. **191** (1998), 467–492.
- [6] T. Brzeziński and R. Wisbauer, *Corings and comodules*, LMS, vol. 309, Cambridge University Press, 2003.
- [7] S. Caenepeel, E. De Groot and J. Vercruysse, *Galois theory for comatrix corings: descent theory, Morita theory, Frobenius and separability properties*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.
- [8] J. Cuadra and J. Gómez-Torrecillas, *Galois corings and a Jacobson-Bourbaki type correspondence*, preprint arXiv:math.RA/0506291.

- [9] E. Dubuc, *Kan extensions in enriched category theory*, Lecture Notes in Mathematics vol. 145, Springer, Berlin, 1970.
- [10] S. Eilenberg and J. C. Moore, *Adjoint functors and triples*, Illinois J. Math. **9** (1965), 381–398.
- [11] L. El Kaoutit and J. Gómez-Torrecillas, *Comatrix corings: Galois corings, descent theory, and a structure theorem for cosemisimple corings*, Math. Z. **244** (2003), 887–906.
- [12] L. El Kaoutit, J. Gómez-Torrecillas, and F. J. Lobillo, *Semisimple corings*, Algebra Colloquium **11** (2004), 427–442.
- [13] J. Gómez-Torrecillas and J. Vercruysse, *Comatrix corings and Galois comodules over firm rings*, arXiv:math.RA/0509106 v1.
- [14] F. Grandjean and E.M. Vitale, *Morita equivalence for regular algebras*, Cahiers de Topology et Geometrie Differentielle **XXXIX** (1998), 137–153.
- [15] L. Marín, *Morita equivalence based on contexts for various categories of modules over associative rings*, J. Pure Appl. Algebra **133** (1998), 219–232.
- [16] D. Quillen, *Module theory over nonunital rings*, Notes, 1997.
- [17] M. Sweedler, *The predual theorem to the Jacobson-Bourbaki Theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **213** (1975), 391–406.